



# **MÚSICA MATEMÀTICA**

**Les matemàtiques aplicades  
a la composició musical**

Treball de recerca

Laia Peyrí Bonet

Tutora: Carme Lleopart

INS Joan Fuster

Curs 2015/16



## ÍNDEX

|                                                               |                |
|---------------------------------------------------------------|----------------|
| Introducció.....                                              | pàg. 2         |
| <b>1. L'ESCOLA PITAGÒRICA. LA SEVA APLICACIÓ.....</b>         | <b>pàg. 3</b>  |
| 1.1 Sistema musical pitagòric.....                            | pàg. 3         |
| 1.2 Relacions de nombre enters.....                           | pàg. 4         |
| 1.2.1. Relació 1:1 (o 1:0).....                               | pàg. 4         |
| 1.2.2. Relació 2:1.....                                       | pàg. 6         |
| 1.2.3. Relació 3:2.....                                       | pàg. 8         |
| 1.2.4. Relació 4:3.....                                       | pàg. 10        |
| 1.3 L'escala pitagòrica.....                                  | pàg. 13        |
| 1.4 L'escala diatònica.....                                   | pàg. 17        |
| <b>2. SEQÜÈNCIES BINÀRIES RÍTMQUES. PATRONS MUSICALS.....</b> | <b>pàg. 20</b> |
| 2.1 Cànon rítmics.....                                        | pàg. 20        |
| <b>3. GEOMETRIA MUSICAL EN LA PARTITURA.....</b>              | <b>pàg. 23</b> |
| 3.1 Transformacions isomètriques.....                         | pàg. 23        |
| 3.1.1. Translacions.....                                      | pàg. 23        |
| 3.1.2. Reflexions.....                                        | pàg. 26        |
| 3.1.3. Rotacions.....                                         | pàg. 27        |
| <b>4. COMPOSICIÓ MATEMÀTICA.....</b>                          | <b>pàg. 28</b> |
| <b>5. CONCLUSIONS.....</b>                                    | <b>pàg. 39</b> |
| <b>6. BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA.....</b>                       | <b>pàg. 40</b> |
| <b>7. AGRAÏMENTS.....</b>                                     | <b>pàg.40</b>  |

## INTRODUCCIÓ

La música és una de les principals manifestacions culturals de qualsevol societat, així com la matemàtica també és present en el dia a dia de qualsevol civilització. Aquests dos pilars tenen moltes característiques comunes, la principal de les quals és que tant una com l'altra són llenguatges universals.

Així doncs, quin tipus de relació existeix entre la música i la matemàtica? Aquesta qüestió ja se la van fer matemàtics grecs com Pitàgores o músics prodigiosos com Mozart i Bach. Els pitagòrics van centrar les bases d'aquestes relacions, i més endavant d'altres erudits en diferents àrees científiques o artístiques van aprofundir i millorar-ne el coneixement i van deixar els seus descobriments en els seus llibres o les seves obres. Però com ho van fer?

En aquest treball pretenc investigar des del més petit enllaç entre música i matemàtica fins a arribar als mètodes de composició matemàtico-musicals que molts compositors utilitzaven per a les seves obres, per a finalment crear música a través de matemàtiques.

Un primer objectiu consisteix en la identificació i coneixement dels elements matemàtics propis del llenguatge musical, assenyalats en el seu dia per l'escola pitagòrica, la qual també va fer servir el càlcul matemàtic per a arribar a comprendre les relacions entre els sons.

Un segon objectiu és conèixer el grau d'aplicació en la història de la composició musical dels descobriments pitagòrics i la seva idea de la música-matemàtica com una manera d'entendre el món físic i emocional; és a dir, la transformació d'aquest coneixement en recursos pràctics per a la composició musical.

El següent objectiu és doncs la detecció d'aquests recursos en les obres, i comprovar-ne la seva utilització, amb exemples sonors de d'èpoques, estils i formacions molt diferents.

Un objectiu més enllà consisteix en fer el camí invers: em proposo traduir a llenguatge matemàtic l'aplicació d'aquests recursos emprats en la composició musical. El meu treball està basat en l'anàlisi de cadascun d'aquests elements i la possibilitat de descriure'n l'aplicació en una partitura.

En la història de la composició musical, principalment a finals del segle XIX i durant el segle XX, han estat molts els compositors que han apostat per una matematització gairebé absoluta de la música, amb músics tan importants com Richard Wagner i Richard Straus i el cromatisme, Schönberg i el dodecafonisme, serialisme, o Xenakis i la música estocàstica.

Sense arribar a tals extrems de matematització, i des d'una postura més modesta, la part final d'aquest treball de recerca es concreta en un "experiment musical": em proposo compondre una obra musical senzilla en la qual apliqui tots els recursos i relacions matemàtiques descobertes. Amb tot això, pretenc demostrar que la frase "*La música és matemàtiques*" que sempre ens han dit, és certa.

## 1. L'ESCOLA PITAGÒRICA. LA SEVA APLICACIÓ.

Pitàgores de Samos (582 aprox. AC – 507 aC) va ser un dels filòsofs més savis de l'Antiguitat. Va fundar la seva pròpia escola, activa des del segle VI aC, que buscava comprendre l'harmonia de l'Univers i considerava els nombres i les seves relacions fruits d'aquesta harmonia. Per tant, les matemàtiques, les estudiaven com a eina fonamental per a tota investigació científica i els van atribuir quatre de les set arts liberals: aritmètica, geometria, astronomia i música. El conjunt d'aquestes quatre arts liberals, el van anomenar *quadrivium* i les tres arts liberals restants, gramàtica, retòrica i dialèctica, les van agrupar en el conjunt anomenat *trivium*.

| QUADRIVIUM                                          |                             |                               |                                   |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| ESTUDI DE QUANTITAT                                 |                             | ESTUDI DE MAGNITUD            |                                   |
| ARITMÈTICA (quantitat absoluta)                     | MÚSICA (quantitat relativa) | GEOMETRIA (magnitud en repòs) | ASTRONOMIA (magnitud en moviment) |
| MATEMÀTIQUES (estudi de tot allò après i immutable) |                             |                               |                                   |

Al *quadrivium*, és a dir, les matemàtiques en sí, Pitàgores li va donar el significat de « estudi de tot allò après i immutable ». D'aquesta manera es va crear un sistema d'idees amb l'objectiu d'unificar fenòmens del món físic i del món espiritual. Es creia, per exemple, amb que les òrbites dels cossos «celestials que giraven al voltant de la Terra», teoria geocèntrica, produïen sons que harmonitzaven entre ells produint un so bell i únic anomenat «la música de les esferes».

Pitàgores va estudiar la naturalesa dels sons musicals, centrant-se en l'escala musical, els intervals i les notes en sí. Els pitagòrics creien que les propietats i les relacions de l'harmonia musical estaven determinades per números així com tota matèria real, així doncs, van acabar afirmant que l'Univers era pura harmonia i número.

### 1.1 El sistema musical pitagòric

Per als filòsofs de l'escola pitagòrica, com ja s'ha dit, els números eren els veritables principis de tota cosa, així doncs, van intentar descobrir místiques relacions numèriques que els duguessin a considerar l'harmonia i la música com a activitats purificadoras de l'ànima. Aquesta creença els va fer dedicar-se plenament als estudis musicals. Aquests estudis van ser creats a partir dels sons produïts al pinçar l'única corda del monocordi, instrument del segle V aC. Va ser Pitàgores qui va començar aquesta investigació i va ser ell qui va obtenir el resultat esperat. La teoria de Pitàgores consistia en què hi havia una relació numèrica entre tons que sonaven harmònics, dient així que la música podia ser mesurada per raons d'enters.

Sabem que el so produït al pinçar una corda depèn de la longitud, amplitud i tensió d'ella mateixa. Cada una d'aquestes variables afecta a la freqüència de vibració de la corda. Al fer-ho amb un monocordi, permet fixar-se únicament en una sola variable, longitud, ja que les altres dues, tensió i amplitud, resten sense canvis. Al variar la longitud de la corda, dividint-la en certes proporcions de nombres enters, es generen les notes musicals.



## 1.2 Relacions de nombres enters

En aquest apartat vull arribar a totes les relacions que els pitagòrics van descobrir, tant fent-les matemàticament com físicament amb una corda de guitarra. Són les inicials, els fonaments, per arribar a objectiu de l'apartat, l'escala pitagòrica i més endavant, l'escala diatònica actual.

Amb l'instrument del monocordi, es té una sola corda i per tant una única nota base. A partir d'aquesta, es busquen les altres seguint les relacions que els pitagòrics van trobar. Aquestes relacions corresponen als intervals, distància entre una nota i una altra. Per trobar aquestes relacions, van fer un patró, una fórmula matemàtica que els permetia arribar a tots els intervals des de la nota base i, més endavant, formar l'escala pitagòrica diatònica.

La fórmula és:  $\frac{n+1}{n}$       n: número enter

### 1.2.1 Relació 1:1 (o 1:0)

És la relació més senzilla de totes, únicament descriu la corda en sí. Per començar a fer aquestes relacions, he utilitzat una guitarra i d'ella, una sola corda. La corda té les següents característiques:

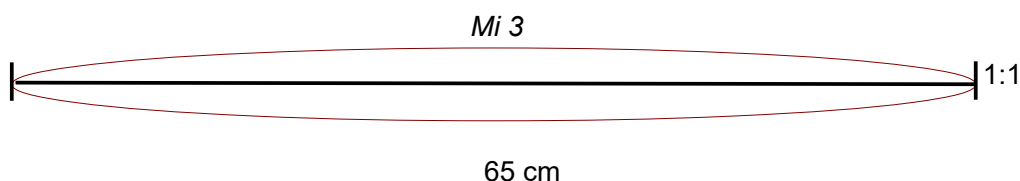
- Nota corresponent: *Mi 3*
- Amplitud: 0,71 mm de diàmetre
- Tensió: 6, 94 kg
- Longitud total: 65 cm

Com parlem de la nota base, utilitzarem com a *n* el nombre 0 i ens queda la fórmula com a:

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=0} \frac{0+1}{0} = \frac{1}{0} \quad \text{El resultat de la divisió és una aproximació infinita al 0.}$$

Al tenir aquest resultat, ho relaciono amb el significat del número 1 que els pitagòrics li van assignar<sup>1</sup>: L' u, «el número de la unitat, el tot, el déu, l'eternitat tranquil·la, la permanència», (li van donar molt més noms). És un nombre amb una estabilitat única: si es divideix o es multiplica per ell mateix, el seu valor, no varia. Si parlem en llenguatge musical, quan agafem un so i el repetim, no aconseguim canviar el so, únicament una repetició. Per tant, podríem dir que l'u des d'un punt de vista musical, ens porta al to base, invariable per ell mateix, a un so infinit. És per aquesta raó que el significat va relacionat amb el resultat de l'operació. Tanmateix, els pitagòrics, van anomenar la relació com a 1:1, ja que el nombre del que estem parlant és l' u i no l'infinit.

Al pinçar la corda, sona el *Mi 3*, que seria la nota base, el número on començaran les relacions:



Seguint el significat que donaven a la relació, aquesta, es va fer servir com a recurs musical en partitures de diversos gèneres i èpoques. La relació 1:1 dóna “estabilitat infinita” als sons que

<sup>1</sup> Els filòsofs grecs, van donar significat a molts nombres naturals, des d'un punt de vista espiritual i religiós.

He buscat aquest recurs en diferents obres, passant per moltes èpoques i estils diferents, cercant aquesta estabilitat que el so base estableix i produeix una sensació d'unificació absoluta de totes les notes.

♩ = 100

4/4

The bass line (bottom staff) is circled in red, indicating it is the focus of the exercise. It consists of four measures, each containing a single half note: C2, D2, E2, and F2.

BSO “*Voyagers du ciel et de la mer*”. Documental instrumentat per Bruno Coulais, compositor i músic francès, que ens ensenya la majestuositat del mar i de l'aire, amb tots els éssers vius que en fan el seu hàbitat. Fragment provinent de “*Vers le ciel*”. El baix és interpretat pels instruments de vent metall més greus i la melodia per violoncels.



2 Tots els fragments musicals del treball els he transcrit amb notació actual a partir de la pista sonora, per tal de simplificar la seva comprensió.



### 1.2.2 Relació 2:1

És la relació que ens permet obtenir un interval d'octava (la distància que existeix entre una nota i la mateixa però més aguda o més greu).

Utilitzant la mateixa corda que anteriorment, aquest cop farem servir com a  $n$  l'1:

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=1} \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{El resultat de la divisió és el dos.}$$

Però com és que els pitagòrics li deien a la relació 2:1 i després la utilitzaven invertida? Vaig estar buscant aquest perquè i amb els següents càlculs vaig arribar a la resposta:

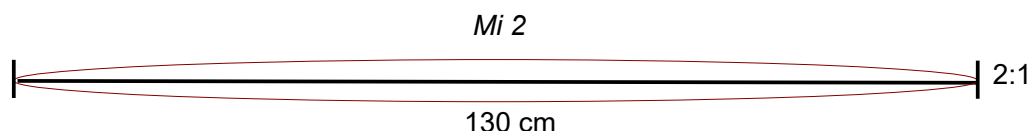
Si ens quedem amb la divisió resultant de la fórmula i la dividim entre dos, el seu dividend,

$$\frac{2}{1} : 2 = \frac{1}{1} \quad \text{ens adonem de que 2:1 no deixa de ser una suma de dues relacions completes.}$$

Aquesta suma ens dona a conèixer què s'haurà de fer amb la corda que nosaltres teníem per arribar a l'octava que busquem:

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \rightarrow 1 \text{ complet: } 65 \text{ cm} \rightarrow 65 + 65 = 130 \text{ cm}$$

Necessitarem 130 cm de corda per a arribar amb l'octava. Per això vaig utilitzar una corda de guitarra de les mateixes característiques que la inicial, però amb 130 cm de llarg i en vaig fer la prova i, efectivament, al fer-la vibrar sonava un *Mi* 2, és a dir, una octava més baixa.



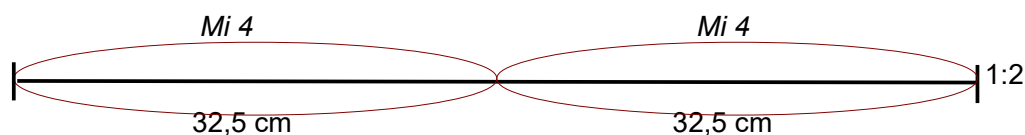
Llavors, aquesta relació només permet obtenir octaves més greus? No, si l'analitzem al complet. Com hem dit abans, l'hem dividida entre el seu dividend, però i si la dividíssim entre el doble d'aquest?

$$\frac{2}{1} : 4 = \frac{1}{2} \quad \text{El resultat que n'obtenim, no és ni més ni menys que la fracció resultant però invertida.}$$

Tot seguit, apliquem aquesta fracció a les mesures de la corda de guitarra i ens indica quina proporció d'aquesta utilitzarem per a obtenir la octava aguda, és a dir, un *Mi* 4:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow 1 \text{ complet: } 65 \text{ cm} \rightarrow 65 : 2 = 32,5 \text{ cm}$$

Necessitarem doncs, mitja corda per fer-la pinçar i que soni el *Mi* 4:



Per als pitagòrics, el número dos era el primer nombre parell i femení. Però com els altres nombres tenia un significat més gran: era qui reunia els oposats. Reunia parelles d'oposats purs com

ara allò limitat i allò il·limitat o la dreta i l'esquerra. Aquest significat em va fer pensar en què la nota que produïa la relació 2:1 no era una casualitat. Si ens hi fixem, l'interval d'octava no és res més que un oposat de la nota base. Així doncs, d'acord amb el significat que li van donar, molts músics van utilitzar el so que proporcionava aquesta relació com a recurs musical. Un recurs musical que servia per donar impuls, passar d'un sol so a un igual però que transformava l'ambient en més ampli i espaiós. Era un so amb bellesa i a la vegada amb força, un so que no passa desapercebut.

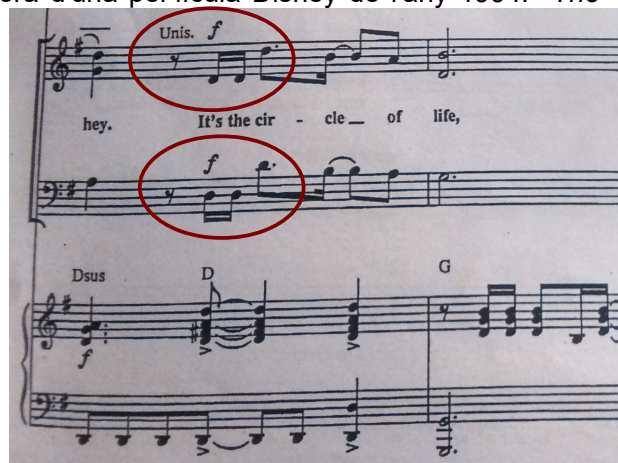
El primer exemple, el situem a l'impressionisme amb el compositor francès Claude Debussy. Una peça per piano anomenada “*Clair de lune*” en la qual el compositor intenta expressar la llum de la lluna projectada en un paisatge. El **recurs** es troba al principi de la partitura, on fa una octava des del baix fins al soprano, com si volgués, en una imatge real, impulsar la mirada amunt i veure la lluna en la negra nit.<sup>3</sup>



El segon exemple, el situem a l'any 1937 i pertany a la banda sonora d'una pel·lícula de Disney: “*La Blancaneus*”. El **recurs** és utilitzat per impulsar la veu de forma musical tot imitant, el que seria a la vida real, un crit. Es troba a la cançó que canten els set nans, “*Heigh-ho*” quan s'avisen entre ells per què es la hora de plegar de treballar i anar a casa a sopar.



El tercer exemple, també és d'una banda sonora d'una pel·lícula Disney de l'any 1994: “*The lion king*”. La música va ser composta per Elton John, i va ser guanyadora d'un Tony i d'un Oscar. Trobem el recurs 2:1 a la primera cançó de la pel·lícula, “*Circle of life*”, en la qual s'intenta expressar la grandesa de la naturalesa i com la vida és una roda que no deixa mai de girar. És utilitzat per donar impuls i mostrar aquesta immensitat del que s'intenta expressar. Es troba en totes les **veus** de l'obra.<sup>4</sup>



3 Imatge de la partitura original de Claude Debussy

4 Partitura original d'un concert de cor juvenil, amb veus de soprano, contralt, tenor i baix.

### 1.2.3 Relació 3:2

És la relació que ens permet obtenir un interval de cinquena (p.ex. la distància entre un *do* 3 i un *sol* 3).

Utilitzant la mateixa corda que en els dos casos anteriors, aquest cop farem servir com a  $n$  el 2:

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=2} \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{El resultat es 1,5.}$$

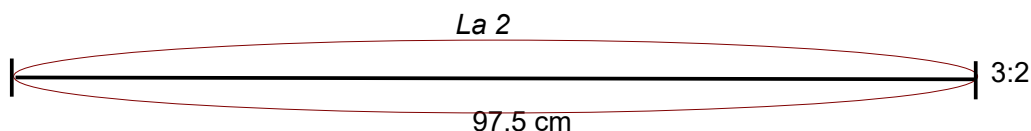
Si ens quedem amb la divisió resultant de la fórmula i la dividim entre un mig,

$$\frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3 \quad \text{ens resulta que no deixa de ser una suma de tres meitats.}$$

Aquesta suma ens indica quina proporció de la corda necessitem:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow 1 \text{ complet: } 65 \text{ cm} \rightarrow 32,5 + 32,5 + 32,5 = 97,5 \text{ cm}$$

Necessitarem 97,5 cm de corda per a obtenir la cinquena que busquem. En vaig fer la prova i, efectivament, va resultar un *La* 2.



Com anteriorment hem vist, la relació 1:2 i la relació 3:2, comparteixen la característica de què es poden desenvolupar en sumes de meitats. Això és degut a que el seu denominador és el dos, i per tant, cada fracció és  $x$  meitats. Però ara ens trobem amb una relació on hi participa un nombre senar, el 3. Llavors, de la mateixa manera que aquesta fracció és possible desenvolupar-la en meitats, també és possible desenvolupar-la en terços.

$$\frac{3}{2} : \frac{1}{3} = 4,5 \quad \text{El resultat que n'obtenim ens indica el nombre de terços que necessitem per complir}$$

aquesta relació.

Tanmateix, la nota resultant no deixa de ser la mateixa que l'anterior. Per no només quedar-nos amb aquesta cinquena i buscar-ne d'altres, es dividirà la relació 3:2 entre la meitat del resultat anterior:

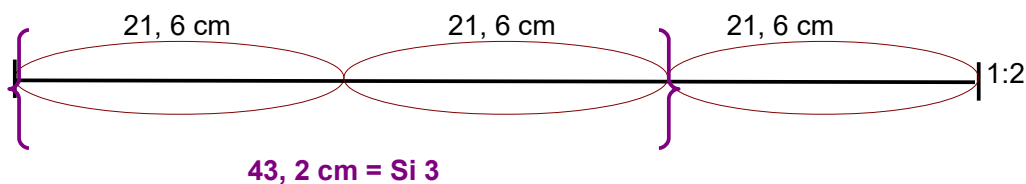
$$4,5 : 2 = 2,25 \rightarrow \frac{3}{2} : 2,25 = \frac{2}{3} \quad \text{i resultarà ser la invertida de la inicial.}$$

Si aquesta nova fracció la tornem a desenvolupar en terços, ens donarà la llargada exacta per a la nota que busquem:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 \quad \text{necessitarem dos terços de la llargada total, és a dir:}$$

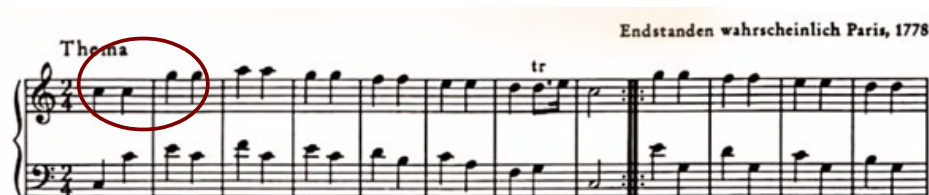
$$65 : 3 = 21,6 \text{ cm} \rightarrow 21,6 \cdot 2 = 43,2 \text{ cm}$$

Pinçant la corda a la mesura indicada, ens resultarà el *Si* 3:

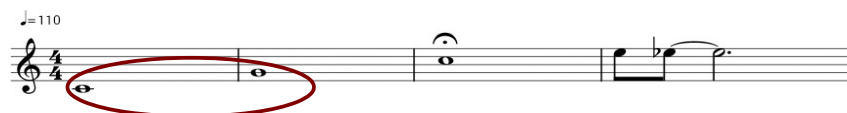


En aquest cas, ens trobem amb una relació que es pot desenvolupar amb terços i mitjos i a més, ens dóna un interval de cinquena. Per tant, he volgut relacionar-ho amb el significat del cinc. Per als pitagòrics, el cinc combinava els dos sexes, masculí i femení ( el 2 i el 3 ) i, així doncs, li van donar la característica de número universal de la reproducció i de la vida biològica. El número cinc es troba a les pomes, a les flors, a les mans i als peus, i per als pitagòrics no era casualitat. El cinc tenia, segons ells, “una qualitat màgica” que feia que tot entrés en harmonia i la unió de diferents nombres resultés completa. Per tant, es pot arribar a la conclusió, de que al igual que el cinc el trobem com un número harmoniós i que dona sentit als seus anteriors, la cinquena també n'és. Se la pot considerar com un interval especial, un interval que fa que encara que rebés un acompanyament d'interval·ls diferents seguirà fent la seva funció i aquesta és la de donar aquell sentit de plenitud que l'harmonia d'una obra requereix. De la mateixa manera que en les anteriors relacions, aquesta ha servit com a recurs musical, donant forma al seu significat i, per suposat, a la seva funció. A continuació, vull mostrar alguns exemples que he trobat amb aquest recurs:

El primer exemple el situem al classicisme, amb el títol de “*Ah, vous dirai-je, Maman*” i el seu compositor és: W. A. Mozart. És una obra<sup>5</sup> d'un tema i dotze variacions i el recurs es troba en començar el tema principal. El fa servir per a donar lloc i ser la base de totes les variacions. Permet que la melodia del tema es recolzi sobre aquesta **cinquena** i donar lloc a la plenitud que el compositor vol expressar.



El segon exemple, compostat per Richard Strauss, el situem als finals del romanticisme i s'anomena “*Also sprach Zarathustra*”. És la coneguda música que va acompanyar, en la pel·lícula “*2001: Odissea a l'espai*”, l'escena filosòfica on es veu com el mico, antecessor de l'home, el primer que aprèn o descobreix és com fer servir eines o, en aquest cas, armes. El recurs és utilitzat al principi de l'obra per donar pas a l'esclat que fa la melodia amb un *tutti*. Fa que la melodia es pugui recolzar perfectament sobre la **cinquena** i seguir endavant.

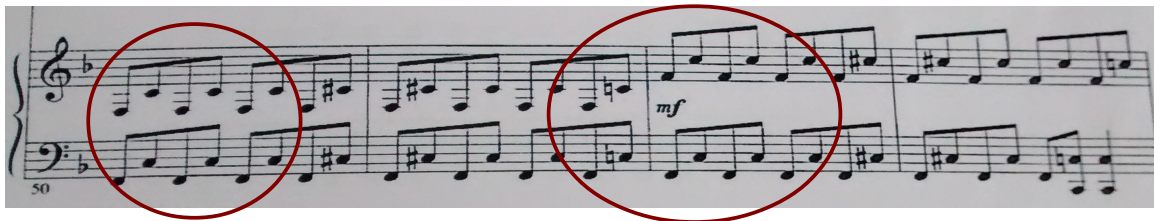


El tercer exemple<sup>6</sup> el situem a finals dels 70, una cançó popular del grup de pop ABBA: “*Mamma mia*”. Les **cinquenes** són la introducció de la cançó que posen el ritme i la melodia alegre amb el sentiment d'amor esbojarrat que la lletra vol transmetre. A més, apareixen en el final de la estrofa anterior a la tornada, el que fa que sigui una preparació pel seu esclat.

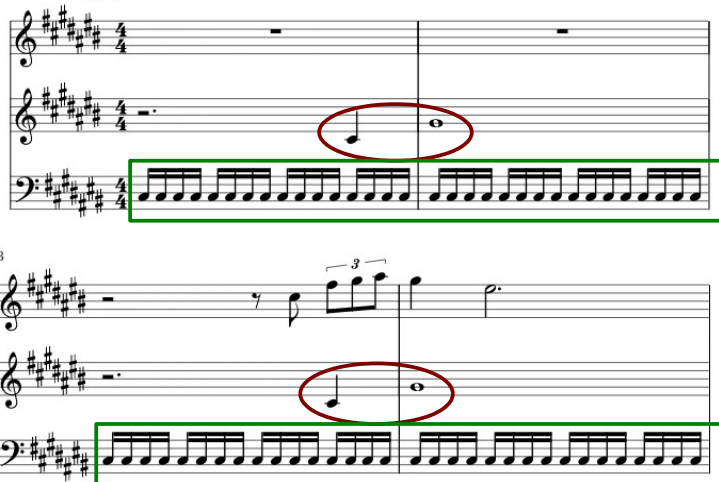
<sup>5</sup> Fragment de la partitura original per a piano.

<sup>6</sup> Partitura extreta d'un concert de coral juvenil amb acompanyament de piano.





Amb el darrer exemple canviem d'estil però continuem al segle XX. És la banda sonora de “Carros de foc”, una pel·lícula del 1981. Composada per Vangelis, compositor grec de música electrònica, bandes sonores i músiques d'ambient, aquest recurs l'utilitza en la peça més coneguda de tota la banda sonora. Només començar, el baix conté unes **cinquenes** que fan d'introducció al tema principal. A més, s'acompanya



també del **recurs** 1:1 en el baix electrònic, que permet donar l'estabilitat necessària per a tota la obra. La música és acompanyada per la imatge d'uns atletes que corren una cursa per diferents escenaris i, la utilització d'aquests dos recursos afavoreix el desenvolupament i la interpretació musical de l'esforç que la imatge transmet. Si observem la partitura, el començament amb l'únic so del baix (recurs 1:1) produeix primer una base que servirà per a la introducció que segueix la cinquena. Aquesta, portarà a la melodia que transmetrà les sensacions que el compositor vol fer sentir.

#### 1.2.4 Relació 4:3

És la relació que ens permet obtenir un interval de quarta (la distància que existeix entre per ex. un *do* 3 i un *fa* 3).

Utilitzant la mateixa corda que amb els anteriors experiments, utilitzarem com a *n* el 3:

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=2} \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3} = 1,33333... \quad \text{El resultat de la divisió és 1,333...}$$

Seguint el procediment que anteriorment he utilitzat, dividirem la fracció resultant de la fórmula per un terç:

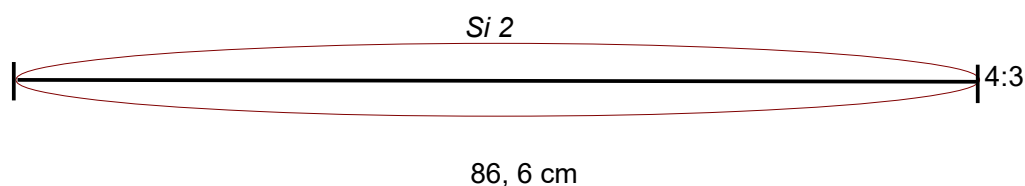
$$\frac{4}{3} : \frac{1}{3} = 4 \quad \text{i ens adonem de que 4:3 és una suma de dues relacions de 2:3.}$$

Aquesta suma, també la podríem desenvolupar en una suma d'un complet amb un terç, i ho passem a centímetres de la corda que necessitarem:

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \rightarrow 1 \text{ complet: } 65 \text{ cm} \rightarrow 65 + (65 : 3) = 86,6 \text{ cm}$$

Necessitarem 97, 5 cm de corda per a resultar amb l'octava. Per això vaig fer sonar la corda llarga de

les anteriors experiències i en vaig fer la prova i, efectivament, al fer-la vibrar sonava un *Si 2*, és a dir, dues octaves més baixa.



De la mateixa manera que les anteriors, aquesta relació també comparteix la característica de tenir com a denominador un nombre senar i de dividend un nombre parell. Tot i així, m'he tornat a fixar en que els pitagòrics la feien servir invertida, així doncs, m'he decidit a cercar quin procediment em podia portar a ella. Abans de tot, m'he fixat en un matís:

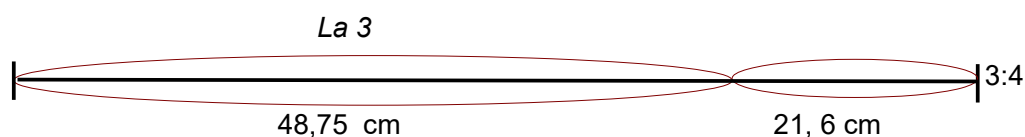
$$\frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3} \quad \text{Efectivament la relació 4:3 no deixa de ser el doble de la relació 2:3.}$$

Per tant, la invertida de 4:3 també és proporcional a la invertida de 2:3:

$$\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4} \quad \text{Així doncs, ja tenim la fracció d'interès.}$$

Tot seguit, apliquem aquesta fracció a les mesures de la corda de guitarra i ens indica quina proporció d'aquesta utilitzarem per a obtenir la quarta, és a dir, un *La 3*:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow 1 \text{ complet: } 65 \text{ cm} \rightarrow 65 - (65 : 4) = 48,75 \text{ cm}$$



Aquesta relació l'he relacionat amb el número quatre, ja que el seu interval és el de quarta. El quatre és el primer nombre resultant diferent de dos nombres iguals. Per tant, li van donar el nom del primer producte de la procreació, el primer nascut. Simbolitzava la Terra i el món natural, les conegudes quatre manifestacions: aigua, terra, aire i foc. El quatre havia de ser un número reial, majestuós, innovador, "*celestial*". I això quina relació té amb el recurs, amb la quarta? La quarta es va fer servir com a recurs musical en moltes músiques fetes servir com a himnes, marxes o cants a la glòria. Té un so que porta a voler aixecar el cap i somriure orgullós del que estàs vivint, i en els exemples següents ho demostraré.

La primera obra pertany al classicisme, té com a compositor W. A. Mozart i és "*La petita serenata nocturna*". Composta per a orquestra de corda, està feta de cinc moviments, dels quals, l'allegro es el més conegut. En aquest és on hi trobem el recurs. Amb una **quarta** als violins, comença la peça així posant la intensitat des de bon començament.



Amb la següent obra, avancem fins al romanticisme, on trobem el compositor Giuseppe Verdi que va fer la coneguda "*Marxa triomfal*" de l'òpera "*Aïda*". El recurs es troba a la meitat de l'obra. Es podria interpretar com la tornada de la peça, ja que ha sigut la més coneguda i la que se sent més



durant l'òpera. Com diu el seu nom, és una marxa triomfal i això fa que sigui possible la **quarta** que hi trobem en els sons de la trompeta.



Els següents dos exemples els he escrit junts perquè els dos van ser escrits amb el mateix propòsit: acompanyar amb música un casament. Són la “*Marxa nupcial*” de Wagner i la “*Marxa nupcial*” de Mendelssohn. No hi ha dos millors exemples per demostrar la *màgia* de la quarta. Justament en l'inici de cada una de les obres, hi trobem una **quarta** que donarà lloc a la melodia que acompanyarà la núvia o el nuvi i, justament en les dues, crea el mateix efecte de donar molta importància al moment.



Marxa nupcial  
de Mendelssohn

Marxa nupcial de Wagner

A continuació trobem com a exemples clars dos himnes de coses ben diferents però totes dues amb la finalitat d'expressar aquell sentiment orgullós que portem a dins. L'un és “*La Marseillaise*”, himne de França escrit per Rouget de Lisle, i l'altre és el famós “*Cant del Barça*”, himne del Futbol Club Barcelona compost per Manuel Valls Gorina. Els dos tenen per començament unes **quartes** que arrenca amb la melodia de manera triomfal.



“*La marseillaise*”

“*Cant del Barça*”

Els últims dos exemples formen part de dues bandes sonores de dues pel·lícules molt conegudes i instrumentades per el mateix compositor, John Williams: el tema principal de “*Star Wars*” i el d’ “*Indiana Jones*”. Les dues cançons comencen amb una **quarta** que fa indubtable saber de quina pel·lícula es tracta. Fa que la música expressi en qüestió de segons l'experiència dels protagonistes amb les aventures que viuen. A més, també hi ha ús del recurs de les **cinquenes** que posen el punt d'èpica a la melodia. Es fan servir durant tota la pel·lícula tant en moments de triomf del protagonista com en moments èpics o al final i al principi.



BSO *Star Wars*

BSO *Indiana Jones*

### 1.3 L'escala pitagòrica

Molt abans d'inventar-se l'escala musical actual, la diatònica, els pitagòrics van inventar la seva, però com? I perquè es va deixar d'utilitzar?

Si ens fixem, les relacions 1:2, 2:3 i 3:4, estan basades en un complet i, les altres no. Per aquesta raó, els pitagòrics es van quedar només amb aquestes. I perquè les anomenaven de l'altra forma?

Una nota va determinada per una altura, que permet identificar-la com a aguda o greu. L'altura és determinada per una freqüència d'oscil·lació de la seva ona sonora: quanta més freqüència, més aguda és la nota. La freqüència de cada una és un valor absolut, que l'identifica de manera unívoca.

Dit això, per completar la resposta, cal matisar que, actualment, un interval té dues formes de definir-se:

1. Distància musical que hi ha entre dues notes, és a dir, quantitat de notes per les que s'ha de passar per arribar d'una a l'altra.
2. Comparació proporcional de les freqüències de cada nota.

Els pitagòrics van fer servir la segona definició per fer la seva escala, però no amb freqüències, sinó continuant amb simples relacions. Dues notes entre sí, mantenen una afinació relativa, de manera que la freqüència absoluta de cada una no és el més important, sinó la proporció numèrica entre les freqüències de les dues. I aquí és quan entren en joc les relacions anteriors: 2:1, 3:2 i 4:3.

Hi ha 12 sons diferents en la música que, en ordre, formen l'escala cromàtica. Els pitagòrics van descobrir aquestes 12 notes diferents amb un sistema d'encadenaments de relacions 3:2. Tenint en compte que ells no sabien res de freqüències, únicament anotaven els resultats com a sons. He fet jo mateixa els càlculs per obtenir les notes exactes a les que ells van arribar, amb l'afegit del càlcul de les freqüències de cada una per a saber a quines notes arribaven:

Partim primer de tot de la freqüència del *do* 4, ja que utilitzarem el *do* 4 com a nota base i en calculem una cinquena ascendent:

$$F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow F_2 = 261,63 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 392,445 \text{ Hz}$$

|                                         |
|-----------------------------------------|
| F <sub>2</sub> : Freqüència que busquem |
| F <sub>1</sub> : Freqüència base        |
| Do 4: 261,63 Hz                         |

La freqüència resultant, correspon a la freqüència del *sol* 4, una cinquena per damunt del *do*.

Tot seguit, es busca la cinquena ascendent del *sol* 4:

$$F_1: \text{Sol } 4 \rightarrow F_2 = 392,445 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 588,67 \text{ Hz} \quad \text{Re } 5$$

$$F_1: \text{Re } 5 \rightarrow F_2 = 588,67 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 883,00 \text{ Hz} \quad \text{La } 5$$

$$F_1: \text{La } 5 \rightarrow F_2 = 883,00 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 1324,5 \text{ Hz} \quad \text{Mi } 6$$

$$F_1: \text{Mi } 6 \rightarrow F_2 = 1324,5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 1986,75 \text{ Hz} \quad \text{Si } 6$$

Si continuéssim, no trobaríem el *fa* natural, sinó el sostingut, així que tornant a la nota base, es fa una cinquena descendent per obtenir el *fa* natural:

$$F_1: Do\ 4 \rightarrow F_2 = \frac{261,63}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 174,42\ Hz \quad Fa\ 3$$

Continuant l'encadenament, acabarem trobant les 6 notes amb alteracions que ens falta trobar:

$$F_1: Fa\ 3 \rightarrow F_2 = \frac{174,42}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 116,28\ Hz \quad Si_b(La\#)\ 2$$

$$F_1: Si_b(La\#)\ 2 \rightarrow F_2 = \frac{116,28}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 77,5\ Hz \quad Mi_b(Re\#)\ 2$$

$$F_1: Mi_b(Re\#)\ 2 \rightarrow F_2 = \frac{77,5}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 51,6\ Hz \quad La_b(Sol\#)\ 1$$

$$F_1: La_b(Sol\#)\ 1 \rightarrow F_2 = \frac{51,6}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 34,4\ Hz \quad Re_b(Do\#)\ 1$$

Si continuéssim per trobar l'última nota que ens falta, el  $Sol_b(Fa\#)$ , ens donaria una nota irreal, no possible, perquè no existeix una "octava 0", així doncs farem servir de nota base el  $Si\ 6$  anterior i seguirem el mateix procediment:

$$F_1: Si\ 6 \rightarrow F_2 = 1986,75 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 2980,125\ Hz \quad Fa\#(Sol_b)\ 1$$

Finalment, hem aconseguit treure l'escala cromàtica amb els dotze sons que la comprenen, i a més, fer el cercle de quintes que més endavant s'utilitzarà per a les armadures de les partitures.

Amb aquest tipus d'encadenament, els sorgia un problema als pitagòrics, que gràcies al càlcul de les freqüències, que ells no van poder fer, es veu clarament: l'escala quedava repartida per 7 octaves diferents, i aquest fet li treia el nom d'escala. Per obtenir una escala de notes compreses dins una mateixa octava, van fer les "*cancel·lacions d'octaves*". Consistia en treure l'octava que sobrepassava al fer el càlcul dividint entre la relació 2:1.

Tot seguit, he agrupat els resultats anteriors dins una escala anant nota per nota:

Partint del  $do\ 4$ , nota base, primer anem a buscar el  $sol$ :

$$261,63\ Hz \rightarrow Do\ 4 = \frac{1}{1} \rightarrow Sol\ 4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} \rightarrow 392,445\ Hz$$

Aquesta vegada, com que busco una escala inclosa dins d'una octava, donarà les relacions de tots els intervals, per tant, deixaré com a resultats les fraccions, com varen fer els pitagòrics, i després calcularé les freqüències.

$$Re\ 4 = \frac{\left(sol \cdot \frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{2}{1}\right)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \rightarrow \text{El resultat ens indica la proporció numèrica d'un to}^7.$$

---

<sup>7</sup> Equivalent a un interval de 2a M.

$$La4 = (re4 \cdot \frac{3}{2}) = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16} \rightarrow \text{Proporció numèrica de l'interval de 6a M}^8, \text{ i no cal cancel·lar res.}$$

$$Mi = \frac{(la \cdot \frac{3}{2})}{(\frac{2}{1})} = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64} \rightarrow \text{Interval de 3a M}^9 \text{ i es cancel·la una octava.}$$

$$Si = (mi \cdot \frac{3}{2}) = \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128} \rightarrow \text{Interval de 7a M}^{10}, \text{ no cal cancel·lació d'octava.}$$

$$Fa = \frac{do}{(\frac{3}{2})} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3} \rightarrow \text{Interval de 4a J}^{11}, \text{ i en aquest cas s'ha afegit una octava.}$$

Ara ja tenim les set notes “naturals” de l'escala que busquem i dins d'una octava, si calculem les freqüències, multiplicant la de la nota base (el do) per la relació de cada interval, ens queda així:

| Nota                   | Do            | Re            | Mi              | Fa            | Sol           | La              | Si                | Do'           |
|------------------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|---------------|
| Relació de freqüències | $\frac{1}{1}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | $\frac{2}{1}$ |
| Freqüència             | 261, 63 Hz    | 294,3 Hz      | 331,1 Hz        | 348,8 Hz      | 392,4 Hz      | 441,5 Hz        | 496,7 Hz          | 523,3 Hz      |

El procés anterior es continua per a treure les notes restants de l'escala cromàtica, tanmateix, en comptes de cancel·lar una octava, n'afegirem una:

$$Si \flat = \frac{fa}{(\frac{3}{2})} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{16}{9} \rightarrow \text{Interval de 7a menor}^{12} \text{ i s'ha afegit una octava.}$$

$$Mi \flat = \frac{(si \flat)}{(\frac{3}{2})} = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27} \rightarrow \text{Interval de 3a menor}^{13} \text{ i no cal afegir cap octava.}$$

$$La \flat = \frac{(mi \flat)}{(\frac{3}{2})} \cdot \frac{2}{1} = \frac{32}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{128}{81} \rightarrow \text{Interval de 6a menor}^{14} \text{ i s'ha afegit una octava.}$$

$$Re4 \flat = \frac{(la \flat)}{(\frac{3}{2})} = \frac{128}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{243} \rightarrow \text{Interval de 2a menor}^{15} \text{ i no cal afegir cap octava.}$$

8 És un interval que conté 4 tons i 1 semitò.

9 Conté 2 tons.

10 Conté 5 tons i 1 semitò.

11 Conté 3 tons i 1 semitò.

12 Conté 5 tons

13 Conté 1 to i 1 semitò

14 Conté 4 tons

15 Conté 1 semitò

$$Sol_b = \frac{(re4_b)}{\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{2}{1} = \frac{256}{243} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1024}{729} \rightarrow \text{Interval de 5a disminuïda}^{16} \text{ i cal afegir una octava.}$$

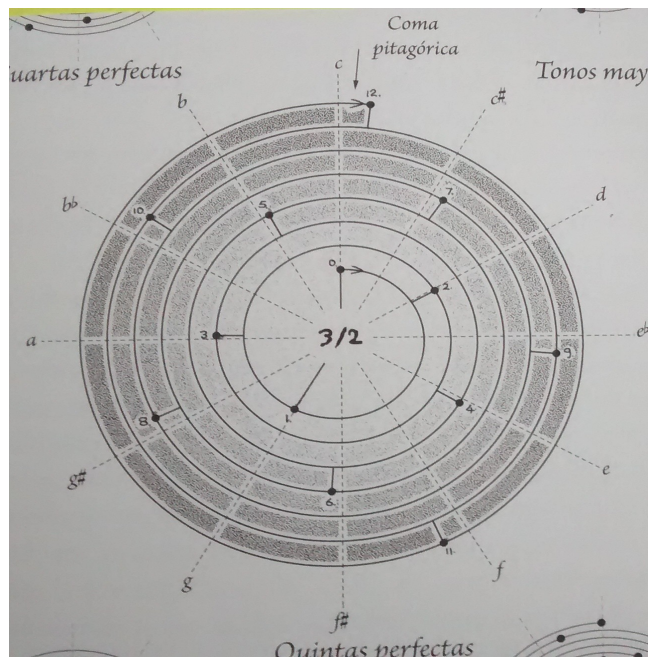
I amb això ja tenim les dotze notes de l'escala cromàtica. Calcularem la freqüència de cadascuna:

| Nota                   | <i>Re<sub>b</sub></i> | <i>Mi<sub>b</sub></i> | <i>Sol<sub>b</sub></i> | <i>La<sub>b</sub></i> | <i>Si<sub>b</sub></i> |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Relació de freqüències | $\frac{256}{243}$     | $\frac{32}{27}$       | $\frac{1024}{729}$     | $\frac{128}{81}$      | $\frac{16}{9}$        |
| Freqüència             | 275,6 Hz              | 310,1 Hz              | 367,5 Hz               | 413,4 Hz              | 465,12 Hz             |

Ara ja sí que tenim les dotze notes de l'escala cromàtica pitagòrica juntament amb les seves freqüències. Però tot no podia ser tan fàcil:

Si partim de la nota base, però aquest cop, en l'altura més greu possible, *do* 1, i fem un encadenament de cinques ascendents, s'haurà de passar per 7 octaves i 12 cinques per arribar altre cop al *do*. En el dibuix de la dreta, està situat en el centre, en la *o*, la nota *do* que va ascendint per cinques perfectes, fent la seqüència *do, sol, re, la*, etc. Cada nota està numerada i cada volta d'espiral representa una octava perfecta. Tanmateix, quan s'arriba al següent *do*, ja hem sobrepassat aquest i s'acosta lleugerament al sostingut. Llavors, com és que fent encadenaments de cinques perfectes no ens dona una octava també perfecta? Això és a causa de que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,75 \quad i \quad 2^7 = 128$$



Com es pot observar, el resultat no coincideix. Teòricament, si calen 7 octaves perfectes i 12 cinques perfectes per arribar al punt inicial, haurien de coincidir els dos resultats. La diferència és la raó per la qual es sobrepassa del *do* : la *coma pitagòrica*, proporcionalment 1,013643265.

$$CP = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,013643265$$

La diferència és una mica més d'un 1% d'una octava, equivalent a casi un quart de semitò i, per això, l'escala cromàtica pitagòrica mai encaixarà i sempre tindrà la *cóma pitagòrica* com a companya. A més, aquesta dona lloc a la "*quinta del llop*". És la última cinquena de l'espiral, la que hauria de tancar al darrer *do* (del *fa* al *do*). Aquesta cinquena, si la reduïssim per a què encaixés amb el *do*, és a dir, si li restéssim la *coma pitagòrica*, no resulta amb una cinquena perfecta, el que fa doncs un so desagradable semblant al d'un llop.

<sup>16</sup> Conté 3 tons

A més de l'error en la compatibilitat dels intervals d'octava i de cinquena, l'escala pitagòrica tenia dos errors més.

El primer consisteix en què si busquem la freqüència del *fa* fent una cinquena perfecta a partir de les freqüències del *si* no obtindrem la mateixa que la del *Sol*, que és com hauria de ser:

$$fa \# = \frac{(si \cdot \frac{3}{2})}{(\frac{2}{1})} = \frac{243}{128} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{729}{512} = 1,423828125 \rightarrow sol \flat = \frac{1024}{729} = 1,404663923$$

Si fem la diferència proporcional entre els dos resultats,

$$\frac{729}{512} : \frac{1024}{729} = 1,013643265 \text{ en resulta la } \textit{còma pitagòrica}, \text{ demostrant que l'escala no encaixa.}$$

El següent error era el de la incompatibilitat entre les cinquenes i les terceres majors. En l'escala pitagòrica, l'afinació de les terceres majors s'obté per encadenament de quatre intervals de cinquena, allò que, cancel·lant octaves, es tradueix numèricament a la relació 81:64. Tanmateix, la relació de tercera major, és més simple: 5:4 (o també 80:64). En les tecles blanques d'un piano, hi ha tres d'aquestes terceres: *do-mi*, *fa-la*, *sol-si*. La forma de fer l'escala pitagòrica, fa que les terceres no siguin “pures” i dona a lloc a un marge d'error que no es pot permetre.

Per tot això, l'escala pitagòrica no es fa servir actualment, però va permetre desenvolupar l'actual.

#### 1.4 L'escala diatònica

L'escala diatònica, és l'escala que es fa servir per a gairebé tot tipus de música des del Renaixement fins l'actualitat. En veure que l'organització dels sons no funcionaven en l'escala pitagòrica, van buscar formes diferents d'arribar a les notes de l'escala cromàtica. La nova escala, tenia una organització més complicada però amb resultats més “purs”.

Començant des del *do*, respecta els intervals de cinquena per a calcular les dues notes més importants de l'escala: el *fa* i el *sol*.<sup>17</sup> Després, calcula el *la*, el *si* i el *mi*, fent terceres majors des del *fa*, el *sol* i el *do*. L'escala es completa amb el *re*, afinat com a una cinquena justa des del *sol*:

|    |   |    |   |     |   |    |
|----|---|----|---|-----|---|----|
| Fa | ← | Do | → | Sol | → | Re |
| ↓  |   | ↓  |   | ↓   |   |    |
| La |   | Mi |   | Si  |   |    |

Comencem a fer càlculs per obtenir les relacions numèriques de cada interval:

$$sol = do \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$fa = \frac{do}{(\frac{3}{2})} = \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

<sup>17</sup> Són les dues notes més importants d'una escala, referint-nos a l'escala de Do M, ja que són els acords de IV i de V, que permeten un sosteniment de la tonalitat.

Ara ja tenim les dues notes principals de l'escala, i de les quals trobarem dues de les terceres majors:

$$la = fa \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

$$si = sol \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Tot seguit busquem la tercera restant, a partir del *do*:

$$mi = do \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

I finalment busquem el *re* amb una cinquena des del *sol* i cancel·lant una octava:

$$Re4 = \frac{(sol \cdot \frac{3}{2})}{\left(\frac{2}{1}\right)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Ara ja tenim les 7 principals de l'escala cromàtica, de les quals calcularem la respectiva freqüència:

| Nota                          | <i>Do</i>     | <i>Re</i>     | <i>Mi</i>     | <i>Fa</i>     | <i>Sol</i>    | <i>La</i>     | <i>Si</i>      | <i>Do'</i>    |
|-------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>Relació de freqüències</b> | $\frac{1}{1}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{2}{1}$ |
| <b>Freqüència</b>             | 261, 63 Hz    | 294,3 Hz      | 327,03 Hz     | 348,8 Hz      | 392,4 Hz      | 436,05 Hz     | 490,6 Hz       | 523,3 Hz      |

En la música tonal, les notes s'organitzen jeràrquicament al voltant d'una nota principal, anomenada *tònica* (en els casos anteriors, es correspon al *do*). Cada nota compleix amb una “*funció*” musical en l'organització, establint les diferents notes el desenvolupament musical. Aquesta funcionalitat fa que algun intervals, els “*no purs*”, convingui afinar-los d'una altra manera segons el context en el que es presenten. La taula procedent mostra una possible afinació:

| Nota                          | <i>Re<sub>b</sub></i> | <i>Mi<sub>b</sub></i> | <i>Sol<sub>b</sub></i> | <i>La<sub>b</sub></i> | <i>Si<sub>b</sub></i> |
|-------------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| <b>Relació de freqüències</b> | $\frac{16}{15}$       | $\frac{6}{5}$         | $\frac{45}{32}$        | $\frac{8}{5}$         | $\frac{16}{9}$        |
| <b>Freqüència</b>             | 279,1 Hz              | 314 Hz                | 368 Hz                 | 418,6 Hz              | 465,12 Hz             |

Tot i que ara tenim les dotze notes de l'escala diatònica amb terceres i cinques pures, continuem amb la *cinquena del llop*, afinada amb una relació de 40:27. Aquest problema era degut a què l'escala diatònica era afinada sobre un *do* com a *tònica* i, per tant, si volguéssim interpretar una obra una tonalitat més alta, en *re*, la *cinquena del llop* passaria a ocupar la posició que abans ocupava l'interval *do-sol*, afinat en 3:2, i l'obra sonaria totalment desafinada.

Fins aquí no hem pogut trobar una escala sense que hi hagi intervals *desafinats*. Els matemàtics van concloure que era impossible trobar-ne una mitjançant la *compensació d'interval*s. Així doncs van buscar una altra forma:



Vicenzo Galilei, va proposar en el segle XVI una divisió de l'octava en 12 semitons iguals que la completessin:

$$x^{12}=2 \rightarrow x=\sqrt[12]{2} \rightarrow x=1,059463094...$$

x: relació de freqüències  
entre dos semitons consecutius

Amb aquest valor, s'aconsegueix que la *cóma pitagòrica* es reparteixi per totes les notes de l'escala i se'n diu "*temperament igual*". Tots els intervals queden equivalentment "*desafinats*" i per a calcular l'afinació de cadascú, només cal encadenar els semitons que hi ha dins l'interval:

| Notes       | Valor dels intervals |             | Freqüències |
|-------------|----------------------|-------------|-------------|
| <b>Do</b>   | $(1,059463094)^0$    | 1           | 261,63 Hz   |
| <b>Do#</b>  | $(1,059463094)^1$    | 1,059463094 | 2277,19 Hz  |
| <b>Re</b>   | $(1,059463094)^2$    | 1,12246384  | 293,67 Hz   |
| <b>Re#</b>  | $(1,059463094)^3$    | 1,189207114 | 311,13 Hz   |
| <b>Mi</b>   | $(1,059463094)^4$    | 1,25992105  | 329,63 Hz   |
| <b>Fa</b>   | $(1,059463094)^5$    | 1,334839852 | 349,23 Hz   |
| <b>Fa#</b>  | $(1,059463094)^6$    | 1,414213559 | 369,99 Hz   |
| <b>Sol</b>  | $(1,059463094)^7$    | 1,498307073 | 392,00 Hz   |
| <b>Sol#</b> | $(1,059463094)^8$    | 1,587401048 | 415,30 Hz   |
| <b>La</b>   | $(1,059463094)^9$    | 1,681792825 | 440,00 Hz   |
| <b>La#</b>  | $(1,059463094)^{10}$ | 1,78179743  | 466,16 Hz   |
| <b>Si</b>   | $(1,059463094)^{11}$ | 1,887748618 | 493,88 Hz   |
| <b>Do'</b>  | $(1,059463094)^{12}$ | 2           | 523,25 Hz   |

He tret les freqüències de cada nota i si ens fixem en la casella del *La*, la seva freqüència és de 440,00 Hz, la freqüència actual i "*bona*". El meu propòsit era trobar l'afinació i l'escala que actualment fan servir i la freqüència del *la* és una prova de què aquesta és la correcta. Totes les notes estan afinades amb la freqüència actual que arreu del món es fa servir. Per tant, es pot dir, que el temperament igual dóna lloc a la escala diatònica que ha permès una afinació en tots els instruments i la música. Ara ja no tenim la *cinquena del llop*, ja que tots els intervals són de la mateixa mesura i així es crea un *color* permanent de l'escala, independentment de quina nota sigui la base. Tanmateix, hi ha músics que ho veuen com una pèrdua de diversitat.

## 2. SEQÜÈNCIES BINÀRIES RÍTMIQUES. PATRONS MUSICALS.

El ritme en un instrument melòdic qualsevol es vesteix amb la melodia, amb els seus lligats, canvis d'altura i d'intensitats. El ritme en un instrument de percussió, en canvi, queda nu. Evidentment, hi ha cops de més intensitat, altura i timbre variat que permeten diferenciar-los, tanmateix, sense aquests matisos, el cop o està present o no ho està, no hi ha més opcions.

En aquest apartat, em fixaré en el ritme pur, en les seqüències cícliques juntament amb les seves distribucions de les articulacions. Em proposo únicament centrar-me en aquestes articulacions, nues de prolongacions per efecte de la ressonància, és a dir, en l'articulació precisa i comprendre'n les seqüències.

### 2.1 Cànon rítmic

En una seqüència completa podem distingir tres nivells de sensació rítmica, segons el grau d'intensitat:

- El primer nivell correspon a l'articulació més ràpida, a les subdivisions del pols. El numerem amb 1, 2, 3, etc., fins arribar a un nou pols, per tornar a començar la seqüència.
- El segon nivell el formen els números 1, els pols.
- El tercer nivell, el més lent, s'escoltaran alguns pols amb més intensitat: els accents.

Per tant, una seqüència rítmica completa, per exemple, de 6/8 seria:

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 1a | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... |
| 2a | 1 |   |   | 1 |   |   | 1 |   |   | 1 |   |   | 1 |   |   | ... |
| 3a | 1 |   |   |   |   |   | 1 |   |   |   |   |   | 1 |   |   | ... |

Ens quedarem amb la 2a línia com a seqüència de referència i completarem els lloc buits amb un zero, obtenint la representació completa. Cada 1 representa un cop; cada 0, un silenci: el ritme pur.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|

Els pols són l'estructura sobre la qual es construeix la música i com hem vist, es poden representar mitjançant sistemes binaris de 1 i 0. Però, per què ho van fer servir els músics? Quina repercussió pot tenir en les partitures?

Aquests sistemes van influir en la composició de cànon rítmics. L'execució simultània de més d'un ritme representa un important desafiament interpretatiu sobretot en allò col·lectiu. Els cànon rítmics consisteixen en què un nombre determinat de veus interpreten la mateixa seqüència rítmica però sempre començant una articulació més tard que l'anterior, seguint sempre un patró:

1. Mai començaran al mateix temps dues o més veus.
2. No pot quedar cap moment sense articulació.

Per tant, si fem la seqüència anterior com un cànon rítmic seria així:

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 1a | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
| 2a |   | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | ... |
| 3a |   |   | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ... |

Amb el cànon rítmic, el que s'aconsegueix és omplir totalment un pla sonor. Llavors, com es podria arribar a crear-ne un, sense haver de fer tota una representació gràfica?

Primer de tot, valorem els elements que influeixen en un cànon rítmic:

- Quantitat total d'articulacions ( $a$ )
- Quantitat total de veus ( $v$ )
- Desplaçament de les entrades de les veus ( $d$ )

Llavors, per a què el cànon pugui ésser possible s'ha de tenir en compte que:

- No poden haver-hi més veus que articulacions per evitar que dues veus coincideixin, per tant, les articulacions han de ser divisibles per les veus.
- Les articulacions han d'estar repartides per l'estructura i aquesta es repeteix en totes les veus iguals. Per tant, les articulacions amb “uns”, han d'estar repartides en el total d'articulacions tenint en compte el número de veus.
- Com que cap de les veus poden començar alhora, ha d'haver-hi un desplaçament d'entrada, però també tenint en compte el nombre total d'articulacions, evidentment  $d$  no pot superar  $a$ , i el nombre de veus, per evitar posicions duplicades.

Seguint aquesta sèrie de condicions, es pot observar unes fórmules, que serviran per fer patrons :

$$\frac{a}{v} = d \qquad \frac{a}{v} = \text{quantitat } d ' 1$$

Amb ja les fórmules tretes, faré un exemple de cànon rítmic:

Suposem que volguéssim fer un cànon a 3 veus amb 12 articulacions, distribuïdes en grups d'igual duració.

$$a=12 \quad v=3 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{v} = \frac{12}{3} = 4 \quad \rightarrow \text{El cànon haurà de tenir 4 “uns” en cada grup de 12.}$$

Ara només falta construir la seqüència, repartint els “uns” de manera que cada grup en tingui un a una posició diferent i els que “sobrin” agrupats a l'últim.

$$0000 \ 0000 \ 0000 \rightarrow 1000 \ 0100 \ 0011$$

Amb això tenim la seqüència principal, la que repetirem en totes les veus. Ara només queda, muntar el cànon tenint en compte que cada una de les veus entrarà a quatre articulacions més tard que l'anterior:

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |     |   |     |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|-----|---|-----|
| 1a | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ... |   |   |   |     |   |     |
| 2a | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0   | 0 | 1 | 0 | 0   | 0 | ... |
| 3a | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0   | 0 | 0 | 0 | ... |   |     |

I ja tenim el cànon rítmic a tres veus.

Per finalitzar aquest tema, he buscat un exemple musical que utilitza aquest tipus de cànon i l'he analitzat buscant la seqüència binària que correspon:

És un cànon infantil francès, “*Frère Jacques*” que es canta a 4 veus<sup>18</sup>. És un exemple bàsic i dóna a veure fàcilment la seqüència binària rítmica que fa servir.



Per començar he aplicat la fórmula per així trobar el nombre d'*uns* que hi haurà a cada seqüència:

$$a=32 \quad v=4 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{v} = \frac{32}{4} = 8 \quad \rightarrow \text{El cànon haurà de tindre 8 "uns" en cada grup de 32.}$$

Muntem la seqüència com anteriorment hem fet, tot i que aquest cop, tindrem en compte que cada fragment de 4 pulsacions es repeteix dos cops.

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 → 1000 1000 0100 0100 0010 0010 0001 0001

Tot seguit hi afegirem les veus restants:

|   |                 |                 |                 |                 |                 |   |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|
| 1 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | 0 1 0 0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0 0 1 0 | 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | — |
| 2 |                 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | 0 1 0 0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0 0 1 0 | 0 0 0 1 0 0 0 1 | — |
| 3 |                 |                 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | 0 1 0 0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0 0 1 0 | — |
| 4 |                 |                 |                 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | 0 1 0 0 0 1 0 0 | — |

<sup>18</sup> A la imatge només es veuen 3 veus, però l'original és amb 4.

### 3. GEOMETRIA MUSICAL EN LA PARTITURA

La ment humana és capaç de seleccionar i agrupar les parts d'un tot i ordenar-les en una forma que es distingeix de la resta- aquest procés passa en el temps gràcies a la memòria, que ens permet observar la construcció d'una obra musical. Així mateix, la ment tendeix inconscientment a completar figures incompletes. Aquestes habilitats permeten a un oient identificar patrons i similituds entre els sons que es van produint en el temps.

Moltes nocions de la geometria han estat utilitzades per nombrosos compositors com a eina compositiva. En certs casos, el "toc" geomètric-musical es manifesta visiblement a la partitura i d'altres en el so directament. Tanmateix, s'ha de tenir en compte que en una partitura, les transformacions geomètriques no es mouen per un pla on les dues dimensions responen a una magnitud, sinó que parlarem de les dues dimensions (altura i temps) per separat.

En aquest apartat faré una descripció comparativa de diferents transformacions geomètriques i d'algunes particulars combinacions de sons.

#### 3.1 Transformacions isomètriques

"Isomètric" significa que respecta les distàncies. Existeixen tres tipus de transformacions isomètriques en el pla: *translació*, *reflexió* i *rotació*, que tenen el seu efecte en la partitura. Com que depenen de les dues dimensions per separat, es formen múltiples combinacions de transformacions:

| Transformació geomètrica | Resultat musical        |               |                        |
|--------------------------|-------------------------|---------------|------------------------|
|                          | Horitzontal             | Vertical      | Horitzontal + Vertical |
| <b>Translació</b>        | 1. Ostinato<br>2. Cànon | Transport     |                        |
| <b>Reflexió</b>          | Inversió                | Retrogradació |                        |
| <b>Rotació</b>           |                         |               | Inversió retrògrada    |

Cada una d'aquestes transformacions, les basarem com en transformacions aplicades a punts concrets sobre un pla.

##### 3.1.1 Translacions

Una translació consisteix en un desplaçament de la figura en una direcció, sense modificar-la de forma ni de rotació. Hi ha les translacions verticals i les horitzontals.<sup>19</sup> Tan l'una com l'altre són aplicades en la música per resultar amb recursos musicals utilitzats per nombrosos compositors.

- **Translacions horitzontals**

La translació horitzontal consisteix en desplaçar la figura cap a la dreta o la esquerra d'un pla. Basant-ho com una translació de punts sobre d'un pla, la transformació es duu a terme:

$$(x, y) \rightarrow (x + n, y)$$

Per aquesta transformació, únicament ens fixarem en la dimensió del temps en la partitura. Musicalment, una translació horitzontal és un desplaçament del so en el temps. Hi ha dos resultats

<sup>19</sup> Imatge que ens mostra les translacions en una funció

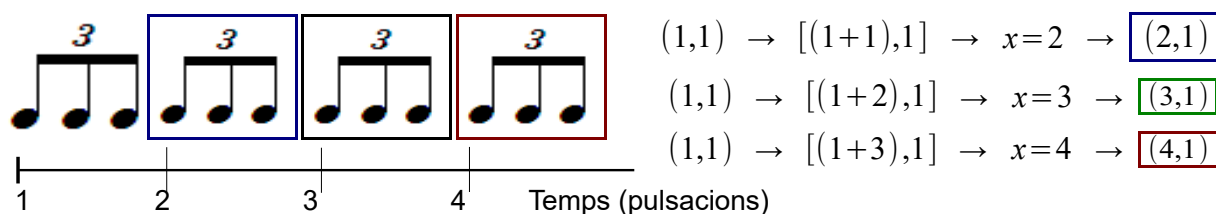
musicals per aquest tipus de transformació geomètrica: els ostinatos i el cànon.

L'ostinato consisteix en un fragment que es va repetint progressivament a la vegada que avança el transcurs de l'obra. Aquest recurs musical es fa servir majoritàriament per acompanyaments en la música clàssica, però també es pot trobar en altres estils, com ara els *riffs* en el rock.

El primer moviment de la *Sonata en Do Major* de Haydn<sup>20</sup>, ens mostra un clar exemple d'aquesta translació horitzontal. La melodia, elaborada amb la mà dreta, es recolza damunt l'acompanyament de continues **translacions** d'un mateix ritme sense variació a llarg del temps. El ritme consisteix en un treset de corxeres que fan les notes de l'acord de la tonalitat en la que es troba en aquell moment la melodia. El **treset** ocupa una pulsació i es trasllada una pulsació en el temps:



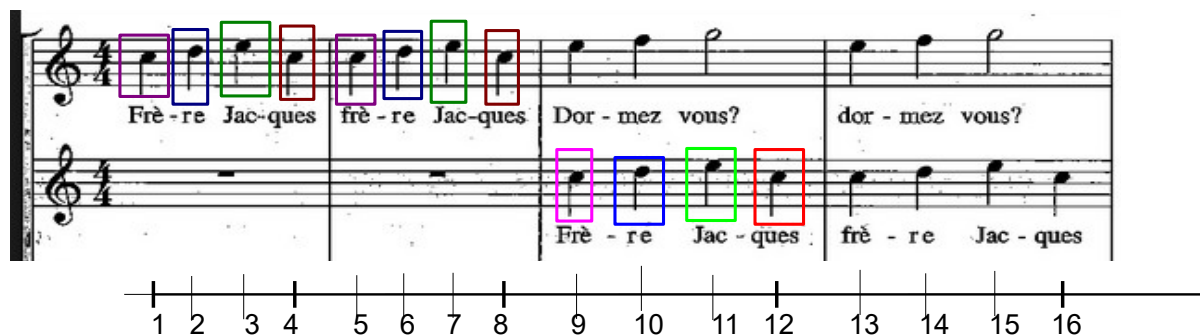
Per a il·lustrar aquesta translació horitzontal, he ideat una línia de gràfic, és a dir, un únic eix de coordenades on es durà a terme la translació horitzontal. Com que en la translació horitzontal, la variable que canvia és la del temps, la línia de gràfic serà la del temps (l'eix  $x$ ). He dividit la línia en pulsacions i cada pulsació és una  $x$ . En la translació horitzontal, es parla del temps  $i$ , per tant, no pot haver-hi unitats de temps negatives ni fer una translació horitzontal en contra del moviment de les unitats del temps (cap a l'esquerra). A més, com que la nota que pateix la transformació, i per conseqüent el ritme en sí, és el *Do 4*, direm que  $y=1$ . Així doncs, la transformació de punts serà la següent:



Les translacions horitzontals, també donen a lloc a cànons. Simplement, no deixa de ser una repetició però que es fa en una altra veu. Per mostrar-ho, he utilitzat el cànon *Frère Jacques*<sup>21</sup> i l'he analitzat gràficament observant que té dues translacions horitzontals: una que porta a una repetició i una altra que porta al cànon.

20 Partitura original de la *Sonata n 5* de Haydn.

21 Anteriorment utilitzat en l'apartat 2.1 Cànons Rítmics.



La primera translació consisteix en la repetició de cada nota del primer compàs en una mateixa veu amb un moviment de 4 pulsacions endavant, és a dir:  $n = -4$ . Cada nota està situada a una pulsació diferent i a una altura diferent, per tant, cada transformació s'aplicarà nota per nota tenint en compte la seva situació:

$$\begin{aligned} (1,1) &\rightarrow [(1+4),1] \rightarrow x=5 \rightarrow (5,1) \\ (2,2) &\rightarrow [(2+4),2] \rightarrow x=6 \rightarrow (6,2) \\ (3,3) &\rightarrow [(3+4),3] \rightarrow x=7 \rightarrow (7,3) \\ (4,1) &\rightarrow [(4+4),1] \rightarrow x=8 \rightarrow (8,1) \end{aligned}$$

Per a la segona translació, s'utilitza el mateix mètode, amb la diferència de que es duu a terme amb una altra veu i amb una transformació de vuit pulsacions més endavant, és a dir,  $n=8$ :

$$\begin{aligned} (1,1) &\rightarrow [(1+8),1] \rightarrow x=9 \rightarrow (9,1) \\ (2,2) &\rightarrow [(2+8),2] \rightarrow x=10 \rightarrow (10,2) \\ (3,3) &\rightarrow [(3+8),3] \rightarrow x=11 \rightarrow (11,3) \\ (4,1) &\rightarrow [(4+8),1] \rightarrow x=12 \rightarrow (12,1) \end{aligned}$$

### • Translacions verticals

La translació vertical consisteix en desplaçar la figura cap amunt o cap avall d'un pla. Basant-ho també com una translació de punts sobre d'un pla, la transformació que es duu a terme és:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+n)$$

Aquesta transformació dóna lloc a un moviment de l'eix vertical, és a dir, de l'altura de les notes, sense modificar-ne el ritme. D'això se'n diu: el transport.

El transport consisteix en traslladar una mateixa seqüència de notes un interval ascendent o descendent en un altre veu. Aquest recurs va ser molt utilitzat des dels anys 40 als 60.

El següent exemple pertany a aquests anys: "*Barbara Ann*", del grup The Beach Boys. S'observa com la **melodia inicial** pateix tres translacions verticals en les tres veus restants. En aquest cas, analitzarem l'exemple només en l'eix vertical i farem les respectives translacions:





Les transformacions a partir de la nota base són d'una 3a, d'una 5a i d'una 8a, així, partint del punt

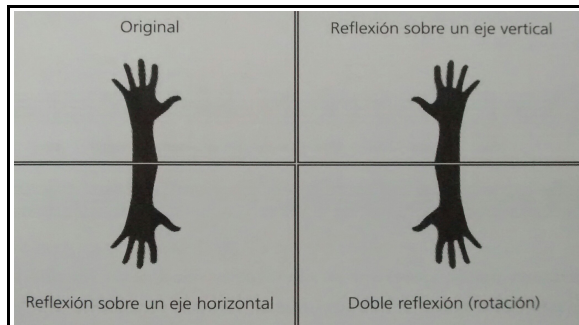
$$(1,4) \rightarrow n=2 \rightarrow [1,(4+2)] \rightarrow y=6 \rightarrow (1,6)$$

$$(1,4) \rightarrow n=4 \rightarrow [1,(4+4)] \rightarrow y=8 \rightarrow (1,8)$$

$$(1,4) \rightarrow n=7 \rightarrow [1,(4+7)] \rightarrow y=11 \rightarrow (1,11)$$

### 3.1.2 Reflexions

La reflexió és una transformació que altera la figura invertint-la, com si estigués reflectida en un mirall. Hi ha tres tipus de reflexions i cada reflexió té la seva repercussió en el món de la composició musical i a continuació em proposo veure i analitzar cada una d'elles.



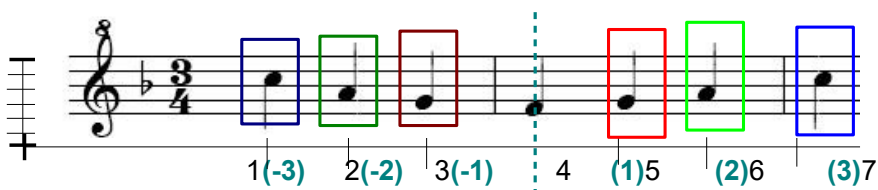
#### • Retrogradacions

Es tracta de les reflexions sobre un eix vertical. En llenguatge musical, correspondria en una melodia que arribat a cert punt, començant des de la darrera nota, es repeteix en seqüència contrària. Si s'interpreten les dues melodies, l'original i la retrògrada, obtenim el que es podria dir una *simetria musical*.

Per a les reflexions, també he utilitzat els eixos anteriors i, concretament, per a les retrogradacions s'utilitza principalment l'eix vertical. En el món dels punts sobre un pla, la transformació consisteix en:

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$ . A continuació, faré com anteriorment he fet, i plantejaré la transformació musical com si fos una transformació de punts:

La peça per a piano de Edvard Grieg, "The morning, Peer Gynt", utilitzada per acompanyar la obra de teatre Peer Gynt, fa servir una simetria inicial per formar la melodia. Per a fer la transformació he introduït la partitura en els eixos de coordenades anteriors i ho he quadrat. A continuació, he introduït l'eix de simetria vertical, que serà l'eix de reflexió. Com que no són possibles les pulsacions negatives, aquest eix només s'utilitzarà per a dur a terme la transformació i, un cop ja acabada, s'eliminarà deixant totes les notes en pulsacions veritables. (eix y imaginari)



Les transformacions són les següents, a partir de l'eix imaginari:

$$(-3,8) \rightarrow [-(-3),8] \rightarrow x=3 \rightarrow (3,8)$$

$$(-2,6) \rightarrow [-(-2),8] \rightarrow x=2 \rightarrow (2,6)$$

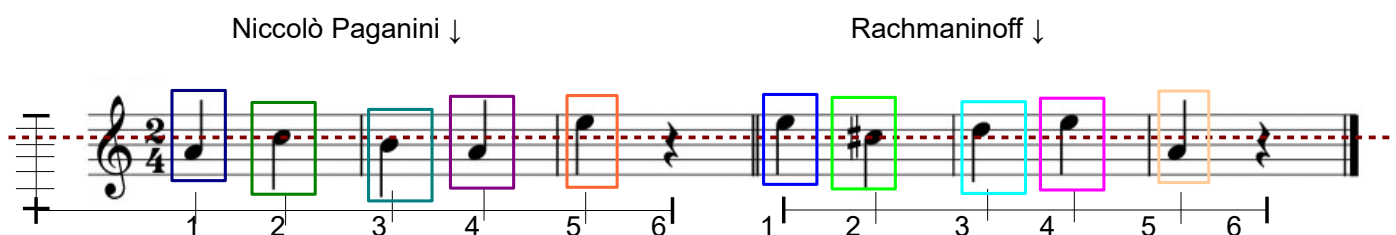
$$(-1,5) \rightarrow [-(-1),8] \rightarrow x=1 \rightarrow (1,5)$$

- **Inversions**

Es tracta d'una reflexió sobre un eix horitzontal. No deixa de ser, una reflexió de la melodia que si era ascendent, passa a ser descendent i viceversa. Si les situem en els eixos anteriors i ho plantegem com punts en un pla, la transformació consisteix en:  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ .

Els *Veinticuatro caprichos* del compositor i violinista italià Niccolò Paganini, han inspirat nombroses variacions. Concretament, del *Capricho nº24*, el compositor Rachmaninoff va crear una versió simètrica invertida, de la melodia principal. Converteix tots els moviments ascendants en descendents i viceversa, mantenint sempre la distància original dels intervals.

He analitzat aquests fragments, escrivint-los seguits sobre un mateix pentagrama i així poder afegir un eix de simetria comú horitzontal, que, com es pot veure es troba en el Do 5.



Les transformacions, per tant, seran les següents:

$$\begin{aligned}
 (1, -2) &\rightarrow [1, -(-2)] \rightarrow y=2 \rightarrow (1, 2) \\
 (2, 0) &\rightarrow [1, -(0)] \rightarrow y=0 \rightarrow (2, 0) \\
 (3, -1) &\rightarrow [1, -(-1)] \rightarrow y=1 \rightarrow (3, 1) \\
 (4, -2) &\rightarrow [1, -(-2)] \rightarrow y=2 \rightarrow (4, 2) \\
 (5, 2) &\rightarrow [1, -(2)] \rightarrow y=-2 \rightarrow (5, -2)
 \end{aligned}$$

### 3.1.3 Rotacions

Una rotació es podria descriure com un gir d'una figura a  $x$  graus. En música, si fem una rotació de  $90^\circ$ , no té sentit, en canvi, una rotació de  $180^\circ$  si que en tindria (com podem veure en la il·lustració). Una rotació de  $180^\circ$ , plasmada en una partitura, és equivalent a una doble simetria vertical i horitzontal.



Si ho plantegéssim com un moviment de punts en el pla, obtindríem que la transformació seria la següent:  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

El geni W. A. Mozart, va compondre tota una obra no molt coneguda, anomenada "*Der Spiegel Duet*", a partir d'aquesta rotació. Es tracta d'un cànon a dues veus per a violins reversible, les melodies del qual estan rotades  $180^\circ$  una respecte a l'altre. L'obra està escrita en un sol pentagrama, i això és gràcies a que l'eix de simetria horitzontal és en el Si 4. Per tant, totes les notes tenen la seva reflexió menys el Si 4 que és manté invariable. A més, a cada extrem de cada pentagrama hi ha una *clau de sol* invertida, per a que sigui possible llegir-lo amb el full "*del dret*" i "*i del revés*" i poder fer el cànon.

#### 4. COMPOSICIÓ MATEMÀTICA

Per finalitzar aquest treball, com a últim objectiu, em vaig proposar fer una composició a partir del que aprenguéis. La composició “*Immersió*” consta de:

Introducció (c.1-9) – A (c.10-22) – Pont (c.22-28) – B (c.29-36) – Pont (c.37-40) – A' (c.41-53) – Coda c.(54-61)

Amb un total de 61 compassos, el procediment que vaig seguir és el següent:

- 1) La obra comença amb una introducció en *Do m*, interpretada per el piano, on no hi vaig voler utilitzar cap recurs matemàtic. Únicament el propòsit d'aquesta introducció és ser el camí cap a la melodia principal, és més, amb l'ajuda de l'arpegi de dominant que fa la flauta travessera, queda perfectament introduït el tema principal.
- 2) En l'anacrusa del compàs n°10, comença el tema A, en *Mi b M*, on la melodia és interpretada per la flauta travessera i el clarinet que en fa la segona veu. El tema A, o principal, volia que fos romàntic i a la vegada amb força, així doncs vaig utilitzar el **recurs 2:1**, en la flauta travessera, per donar aquest impuls que em permetria començar amb tant romanticisme. El clarinet, fent la segona veu, no vaig voler que fes el mateix, sinó que hi vaig afegir més força i més èmfasi al començament utilitzant el **recurs 4:3**. Amb aquests dos vaig aconseguir que l'entrada digués: “*Ei, ja ha arribat el tema principal!*”.
- 3) Únicament avançant un compàs, concretament al n°11, la melodia, ja assentada en el seu to, agafa un so suau i senzill, però jo volia que sonés a la vegada ample. Això ho vaig aconseguir aplicant una **inversió** de la veu principal en el clarinet, el que em permetia obtenir l'amplitud del so. Aquest recurs es torna a repetir en el següent compàs per seguir amb aquesta sensació. La inversió de les tres notes del treset és la següent:

$$(3,1) \rightarrow [1, -(1)] \rightarrow y=-1 \rightarrow (3,-1)$$

$$(3,3;2) \rightarrow [3,3;,-(2)] \rightarrow y=-2 \rightarrow (3,3;-2)$$

$$(3,6;1) \rightarrow [3,6;,-(1)] \rightarrow y=-1 \rightarrow (3,6;-1)$$

- 4) En la casella de la segona repetició, anacrusa del compàs n°19, havia d'introduir el final del tema A i per donar la sensació de que ja arribava aquest final, que també havia de donar majestuositat com la resta, la melodia principal, flauta travessera, el comença amb una quarta, és a dir, el **recurs 4:3**.
- 5) Tot seguit, compàs n°19 també, no volia perdre la amplitud tot i que arribés al seu final, així doncs, vaig tornar a aconseguir-la gràcies a la utilització d'una **translació vertical** de la veu principal, interpretada altre cop per el clarinet. Aquesta s'allarga fins el compàs n°21, el final del tema A. La translació és d'una tercera en avall, tot i que estiguin en octaves diferents, és a dir, en la primera nota:  $(1,3) \rightarrow n=-3 \rightarrow [1,(3-2)] \rightarrow y=1 \rightarrow (1,1)$
- 6) Abans del tema B, vaig voler un petit pont que ens hi portés directament, ja que el to és diferent del de la obra. Aquest pont, per tant, havia d'aconseguir una modulació al nou to i això ho vaig aconseguir aplicant el **recurs 1:1** tant en la veu del clarinet com en la del piano. La veu del clarinet, vaig fer que es mantingués en la nota comú de les tonalitats, fet que permetia tenir una

estabilitat completa i una imatge de transició. Però per afegir-hi més èmfasi al canvi, s'havia d'intensificar i això ho vaig assolir amb el piano, el qual, amb la mà esquerra fa acords d'octava, durant compassos sencers, de la tònica de les tonalitats a que ens transportaven. El recurs em permetia assentar tots els tons, encara que només fos per una duració molt petita (del compàs nº23 al 25).

- 7) Al final d'aquesta transició utilitzant el recurs 1:1, em quedava fer el to de sèptima que em portaria al to del tema B. Per arribar a la sèptima, les dues veus que feien el recurs 1:1, piano i clarinet, utilitzen una quinta (**recurs 3:2**) que es manté. A més a més, el violoncel i el piano també fa una quarta, és a dir, el **recurs 4:3**. Això té lloc al compàs nº26.
- 8) Després d'una llarga escala cromàtica interpretada pel piano, que finalitza en la mateixa nota que comença però augmentada un semitò (per tant és la sensible del nou to), comença el **cànon** en *Do m*. El tema B volia que fos completament diferent al tema A en tots els aspectes: tempo, tonalitat, estil i tècnica. Això ho vaig aconseguir amb una variació a un tempo més ràpid i un canvi de tonalitat a *Do m*, però sobretot amb el cànon. El cànon, interpretat, des del compàs nº29, per la flauta travessera i el clarinet, està fet a partir de una seqüència binària tenint en compte la llargada i la resolució. Els càlculs són els següents: Tenint en compte que hi ha dues veus i el cànon té 16 articulacions:

$$\frac{a}{v} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{Hi haurà d'haver-hi 8 uns en cada grup de 16.}$$

Per a fer la seqüència vaig tindre en compte els temps forts i dèbils, no com als cànons anteriors (ja que els ritmes eren de pulsacions fortes), i que l'entrada de la segona veu es correspon en els temps dèbils de la primera. Així doncs queda així:

0000 0000 0000 0000 → 1100 1100 1100 1100

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | — |
| 2 |   |   | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | — |

Ja muntada l'estructura del cànon, com que volia canviar totalment de temàtica, vaig començar-lo amb dues quarts (**recurs 4:3**) per així deixar clar que la part romàntica s'havia quedat enrere i entràvem en un període completament diferent. A més a més, per donar-hi més solidesa, hi vaig afegir un **recurs 1:1** al violoncel repetint la mateixa nota per acompanyar.

- 9) Després del cànon, compàs nº37, amb el qual finalitza el tema B, vaig fer un altre pont per tornar a la tonalitat inicial i fer la reexposició del tema. El recurs que vaig utilitzar és similar al pont anterior, ja que es tracta de mantenir una sèrie de notes invariables amb la mà dreta del piano mentre la mà esquerra i el violoncel van fent les modulacions fins a la dominant de *Mib* *M*. La sèrie de notes, anteriorment feta amb el recurs 1:1 del clarinet, ara es tracta de múltiples **translacions horitzontals** que va fent la mà dreta del piano. El clarinet i la flauta travessera fan els ornaments. Aquestes translacions horitzontals permeten el so invariable necessari per la modulació que dura fins el compàs nº40, tot i que les translacions acaben en el compàs nº39:

$$(1,5) \rightarrow [(1+1),1] \rightarrow x=2 \rightarrow (2,5)$$

$$(1,5) \rightarrow [(1+2),1] \rightarrow x=3 \rightarrow (3,5)$$

$$(1,5) \rightarrow [(1+3),1] \rightarrow x=4 \rightarrow (4,5)$$

- 10) També cal afegir que aquesta sèrie de notes anterior se'ls hi aplica múltiples **retrogradacions** en dues notes com a eix: el **do** i el **sol**. Per exemple, la primera retrogradació, amb l'eix en el **do**, seria:

$$(-2,5) \rightarrow [-(-2),5] \rightarrow x=2 \rightarrow (2,5)$$

$$(-1,3) \rightarrow [-(-1),5] \rightarrow x=1 \rightarrow (1,5)$$

- 11) A partir ja de l'anacrusa del compàs nº41, es repeteix el tema A, és a dir la reexposició, i tots els recursos aplicats anteriorment també.
- 12) En els compassos nº51 i 52, vaig voler fer, per finalitzar la reexposició, una **translació vertical** de la veu principal amb el clarinet i també a base d'una tercera en avall. La translació dura fins finalitzar el tema A', al compàs nº53.
- 13) Finalment, vaig voler fer un final que trenqués completament amb tota l'obra, un final que fos majestuós però aquest cop a base d'acords. Començant al compàs nº 54, la flauta es qui fa la melodia principal, tot i així el treball d'harmonització es veu entre el clarinet, el violoncel i el piano. No podia acabar l'obra de qualsevol manera, així doncs, seguint la idea de grandiositat que volia que fos el final, el recurs que més em podia donar aquesta sensació era el **recurs 4:3** que el vaig aplicar a la veu principal, al compàs nº58-59. El que em va permetre aquest recurs va ser indicar que s'acostava el gran final, el qual per remarcar-lo encara més, al piano i al violoncel els vaig fer fer una cadència autèntica, és a dir, el **recurs 3:2**.

Per acabar aquest apartat, vull aclarir la raó per la qual no hi ha cap recurs de rotació. El motiu és per l'envergadura de la obra i per la utilització d'aquest: la llargada de la obra no podia ser d'una extensió extremadament llarga i per tant aquest recurs era impossible de col·locar ja que necessita força amplitud, així mateix, aquest recurs és utilitzat per obres com ara la de Mozart (pàg. 30), és a dir, que hauria de ser tota l'obra pensada per una rotació. L'últim aspecte no el podia dur a terme per què llavors és impossible ficar-hi gaires recursos així com instruments.

A continuació està la composició:

# Immersion

Laia Peyrí Bonet

Andante ♩ = 104

Flauta Tr

Clarinet

Violoncel

Piano

*mf*

Andante ♩ = 104

5

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

rit. . . . .

rit. . . . .

9 *Andante espressivo* ♩ = 80

Fl. *f* *tr*

Cl. *mf* 3 3 3

Vc. *legato* *f*

Pno. *mf* 3 3

Ped. \* Ped. \* Ped. \*

Detailed description: This block contains measures 9 through 13 of a musical score. The tempo is marked 'Andante espressivo' with a quarter note equal to 80 beats. The key signature has three flats. The flute part (Fl.) begins at measure 9 with a forte (f) dynamic, playing eighth notes and a trill (tr) in measure 10. The clarinet part (Cl.) enters in measure 10 with a mezzo-forte (mf) dynamic, playing triplets of eighth notes. The violoncello part (Vc.) has a 'legato' marking and a forte (f) dynamic, playing a series of eighth notes. The piano part (Pno.) features a mezzo-forte (mf) dynamic, with a triplet of eighth notes in the right hand and a continuous eighth-note pattern in the left hand, accompanied by a series of pedal markings (Ped. and asterisks).

14 1. 3

Fl. 1.

Cl. 1.

Vc. 1.

Pno. 1. 3

Ped. \* Ped. \* Ped. \* Ped. \*

Detailed description: This block contains measures 14 through 18. The flute (Fl.) and clarinet (Cl.) parts both feature first endings (marked '1.') that lead to a repeat sign. The violoncello (Vc.) part also has a first ending. The piano (Pno.) part includes a first ending and a triplet of eighth notes in the right hand. The left hand continues with the eighth-note pattern and pedal markings (Ped. and asterisks).





26 **rit.** . . . . .

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

**rit.** . . . . . *8va*

*Ped.* \* *Ped.* \*

**rall.** . . . . . **Andante con spirito** ♩ = 84

28

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

**rall.** . . . . .

*Ped.* \*

30

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Measures 30-33. Flute (Fl.) and Clarinet (Cl.) parts feature melodic lines with slurs and ties. Violoncello (Vc.) part has a rhythmic pattern of eighth notes. Piano (Pno.) part is silent.

34

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Measures 34-36. Flute (Fl.) and Clarinet (Cl.) parts continue their melodic lines. Violoncello (Vc.) part continues its rhythmic pattern. Piano (Pno.) part remains silent.

37

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

39

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

\* Ped.

Ped.

\* Ped.

rall. . . . Andante espressivo ♩ = 80

*f*

*f*

*mf*

*mf*

43

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Ped. \*

Measures 43-47. Flute and Clarinet parts feature melodic lines with triplets and slurs. Violoncello part is a steady eighth-note accompaniment. Piano part includes triplets and slurs. Pedal points are marked with asterisks.

48

Fl.

Cl.

Vc.

Pno.

Ped. \*

Measures 48-52. Flute and Clarinet parts feature melodic lines with triplets and slurs. Violoncello part is a steady eighth-note accompaniment. Piano part includes triplets and slurs. Pedal points are marked with asterisks.

[illegible][illegible]

## 5. CONCLUSIONS

Vaig començar aquest treball convençuda que les relacions matemàtiques amb la música existien. Em vaig proposar trobar-les, analitzar-les, identificar-les i emprar-les. Fent tot aquest procediment, crec fermament que he aconseguit el meu propòsit. La consecució dels objectius que m'havia proposat m'ha portat a les següents conclusions:

La música està estretament relacionada amb les matemàtiques: per començar, la nostra escala diatònica ja està creada a partir de fórmules matemàtiques i una sèrie de càlculs que ens han permès cantar de la manera que ho fem ara i durant tant de temps. Al principi pensava que només podien ser relacions molt bàsiques i que no tenien un efecte important en el so de l'obra, però en investigar-ho, em vaig donar compte que realment hi ha un ressò important de les matemàtiques en la composició més simple. Hi ha moltíssimes obres -més de les que em pensava- que utilitzen aquests recursos, i m'he fascinat a mi mateixa veient aquest efecte que creen. Des de la música d'un himne d'un equip de futbol fins una obra del gran Mozart, hi trobem presents les matemàtiques i això simplement és fascinant. S'obre un ventall de possibilitats que mai m'hagués plantejat que està per tot arreu del nostre entorn musical i no ens n'adonem. Per això puc afirmar que la relació existeix, que és present a moltíssimes obres properes i no tan properes a nosaltres.

Els recursos identificats s'han fet servir per a compondre: quan vaig descobrir tots aquells recursos en totes les obres, volia saber el perquè. Per quin motiu el va fer servir? Quin efecte produïa per a què decidissin emprar-lo? Això encara em va deixar més meravellada. És increïble veure com una simple quarta pot crear la sensació de majestuositat i, encara més increïble, que estigui present en gairebé tots els himnes i marxes més conegudes. És fascinant veure com una simple reflexió de tipus inversió crea aquest ambient d'amplitud i cohesió que fa que els instruments i la melodia quedin perfectament quadrades. Tots els recursos han estat aplicats per a donar tot l'èmfasi que necessita l'obra, o més ben dit, que vol donar el compositor. Que no només sigui present en una obra, sinó, tenir més d'un i de dos exemples, és una clara demostració de la utilització de les matemàtiques per a compondre.

És possible crear música a partir de matemàtiques: quan vaig decidir fer aquest tema i treballar-lo tenia clar que el que descobrís ho havia de posar en pràctica. El que no m'esperava és que aconseguís aquests resultats. Era magnífic pensar en una melodia fent servir els recursos i veure que tenien el seu efecte. Si volia començar la melodia amb un so anacrúsic que em dugués a ella com una empenta, vaig tenir clar quin recurs utilitzar, però veure que donava la sensació que jo volia, això em va impressionar. Veure com les matemàtiques permeten transmetre la sensacions que portes a dins en una partitura, és fantàstic. Vaig començar l'obra pensant només en què havia d'utilitzar tots els recursos, però a mida que el temps avançava, els recursos em sortien sols, com si la partitura me'ls demanés per evocar el sentiment que volia transmetre.

Dit tot això puc afirmar la frase que fa tan de temps volia verificar:

*“Sí, la música és matemàtiques.”*

## 6. BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

### Bibliografia:

- Hofstadter, Douglas R., **Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle**, Barcelona, Tusquets Editores, 2007.
- Gutiérrez, Juan Luis; Berenguer, José Manuel, **El mundo de las matemáticas**, Barcelona, Ediciones Nauta, 2003.
- Critchlow, Keith; Lundy, Miranda; Sutton, Daud; Ashton, Anthony; Martineau, Jason, **Quadrivium**, Barcelona, Librero b. v., 2014.
- Zamacois, Joaquín, **Tratado de armonía**, Madrid, Mundimúsica Ediciones, 2007.
- Partitures diverses extretes de la biblioteca del Conservatori Municipal de Música de Barcelona.

### Webgrafia:

- Acústica Musical, [http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing\\_ond\\_1/trabajos\\_05\\_06/io2/public\\_html/introduccion.html](http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_05_06/io2/public_html/introduccion.html)
- Metacognició y transversalidad de la música, <http://myt-de-la-musica.blogspot.com.es/>
- Conceptes d'història de la música, <http://blocs.xtec.cat/hmusica/>
- Sector matemàtica, <http://www.sectormatematica.cl/historia.htm>

## 7. AGRAÏMENTS

En primer lloc, vull donar les gràcies a la Carme Lleopart, que m'ha tutoritzat aquest treball i m'ha ajudat amb qualsevol dubte i en qualsevol moment.

En segon lloc, vull també donar les gràcies al professor d'harmonia Joan Elias del Conservatori Municipal de Música de Barcelona per haver escoltat "*Immersió*" i haver-ne supervisat la seva composició.

I en darrer lloc, vull agrair a les persones que han fet possible donar vida a l'obra: als músics, Aleix Yébenes (piano), Laia Montlló (flauta travessera), Pau Valls (violoncel) i David Ariza (clarinet); al tècnic de so, Martí Boixader; i a la càmera Paula Martínez.